



JOURNEES NATIONALES  
MACONNERIE

5ème édition – Bordeaux

12 et 13 Juin 2025



# Comparaison de deux méthodes de calcul numériques : éléments finis non linéaires et analyse limite

Cas de Notre-Dame de Paris

**NOUGAYREDE Paul**, CIBLAC Thierry, Maurizio Brocato

[paul.nougayrede@univ-tlse3.fr](mailto:paul.nougayrede@univ-tlse3.fr), [thierry.ciblac@paris-malaquais.archi.fr](mailto:thierry.ciblac@paris-malaquais.archi.fr)



École nationale supérieure  
d'architecture Paris-Malaquais

UNIVERSITÉ —  
— PARIS-EST

# Contextes et problématique générale



Chantier du marché couvert de Saint-Dizier,  
Studiolada, 2023



Voûtes de la cathédrale  
Notre-Dame de Paris, 2023



- **Patrimoine bâti** en pierre important
  - Grande variété des structures maçonnées existantes
  - Besoin de diagnostic mécanique de l'existant
- **Construction neuve** : redécouverte progressive des avantages de l'utilisation de la pierre dans le contexte actuel, par rapport aux matériaux de construction dominants

➤ Besoin d'**approches mécaniques** efficaces pour l'étude et la conception des **structures clavées** : arches, dômes, voûtes, plate-bandes...

Objectif : gestion des complexités de **modélisation** des structures en pierre (hétérogénéité, stéréotomie, ouvertures et glissements de joints)

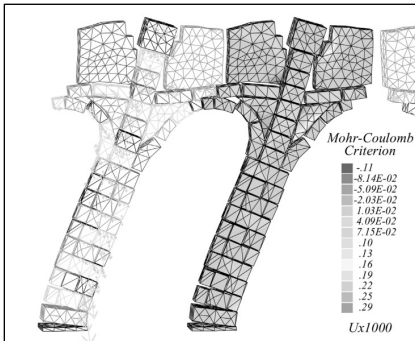


1. Modélisation bloc à bloc par la **Méthode aux éléments finis (MEF)**
2. Modélisation bloc à bloc par **Analyse limite (AL)**
3. Applications et discussions des méthodes **AL** et **MEF** sur un exemple d'application  
Cathédrale Notre-Dame de Paris : voûte sexpartite du chœur
4. Conclusions et perspectives

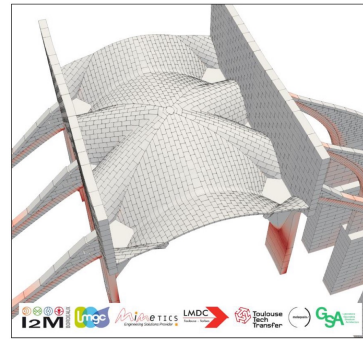
# 1. Modélisation bloc à bloc par la Méthode aux éléments finis (MEF)



Méthode déjà calibrée et éprouvée sur des structures existantes en pierre...

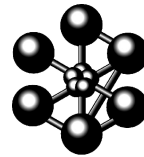


P. Pegon et al. / Computers and Structures 79 (2001) 2165-2181



Diagnostic mécanique des voûtes  
Chantier Scientifique Notre-Dame

Code de calcul aux éléments finis généraliste **Cast3m**



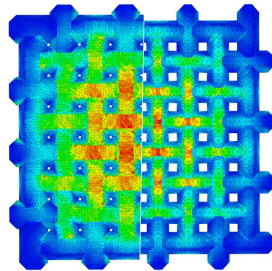
- Blocs 3D élastiques
- Contacts entre blocs : joints 2D non linéaires (ouverture en traction, critère de plasticité de Coulomb, glissement non dilatant)
- Chargement « pas à pas »

...Et sur toutes sortes de structures réciproques en pierre réalisées au laboratoire GSA – école d'architecture Paris-Malaquais

Voûte plate d'Abeille



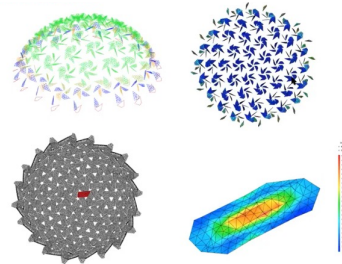
M. Brocato, L. Mondardini / Int J Solids Stru 54 (2015) 50–65



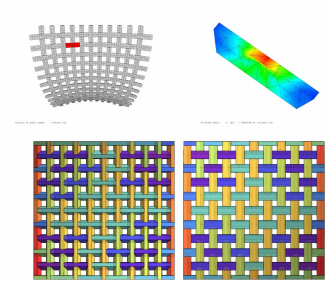
Dôme autobloquant



M. Brocato Int J Solids Stru 49 (2012) 1786-1801



PH autobloquant, Troyes 2013





## 2. Modélisation bloc à bloc par Analyse limite (AL)

$$\begin{aligned} \max \quad & \lambda \\ \text{tel que :} \quad & f_D + A \begin{pmatrix} n \\ v \\ m \end{pmatrix} + \lambda f_L = \mathbf{0} \text{ (équations d'équilibres statiques)} \\ & \begin{pmatrix} n \\ v \\ m \end{pmatrix} \in \mathcal{C} \text{ (critères de résistance)} \end{aligned}$$

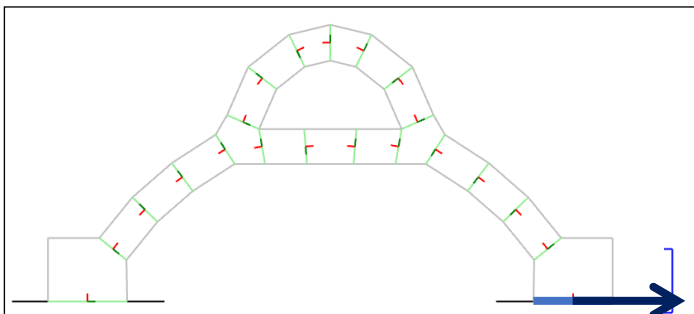
$\lambda$  : multiplicateur de charge  
 $f_D$  : efforts permanents  
 $A$  : matrice de connectivité de la structure  
 $f_L$  : direction du chargement  
 $\begin{pmatrix} n \\ v \\ m \end{pmatrix}$  : efforts internes aux joints  
 $\mathcal{C}$  : cônes des critères de résistance

⇔

« Si j'appuie là, ça tient ou pas... ? »  
 Et si ça tiens pas, comment ça tombe ?

Quelques caractéristiques notables de cette modélisation :

- Mode de rupture cinématique
- Efforts aux joints, lors de la rupture (ligne de pression)

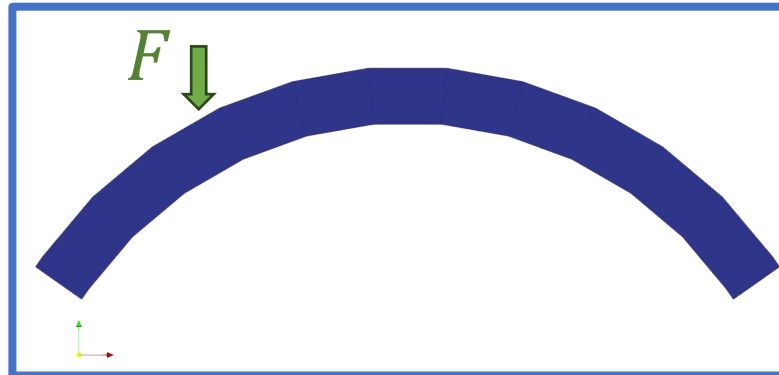


- Implémentation complète sous forme d'un plugin pour Rhinoceros : Stabilithos (plugin pas encore dispo... c'est pour bientôt, promis...!)
- Résolution 2D ou 3D, au choix
- Choix des critères associés : Heyman, Coulomb, limite finie en compression
- Critère exact de limite finie en compression en interaction N-M, quelque soient N et M, en 3D, pour une forme de joint quelconque (cf <https://theses.hal.science/tel-04523845>, pages 211 à 225)

### 3. Méthodes AL et MEF comparées

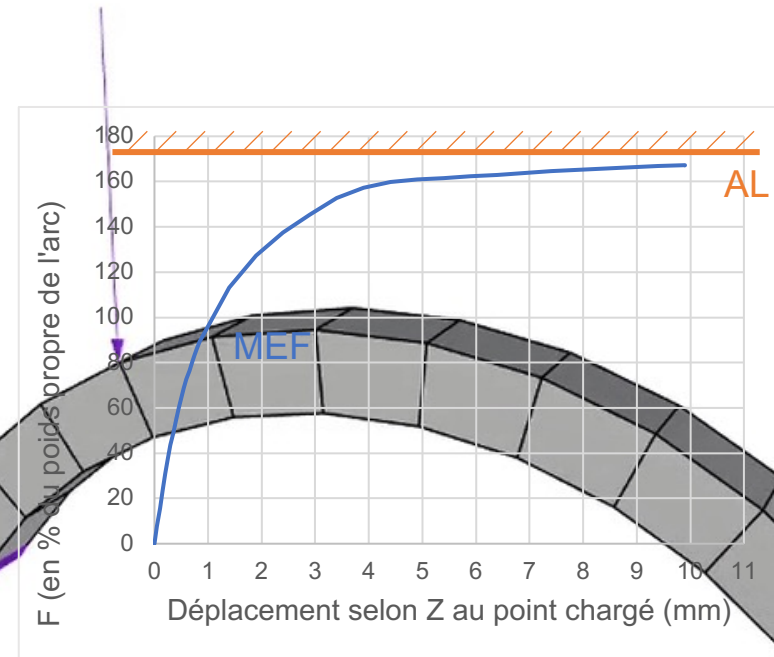
Pour s'échauffer, un exemple simple :

Méthode aux éléments finis (MEF) :

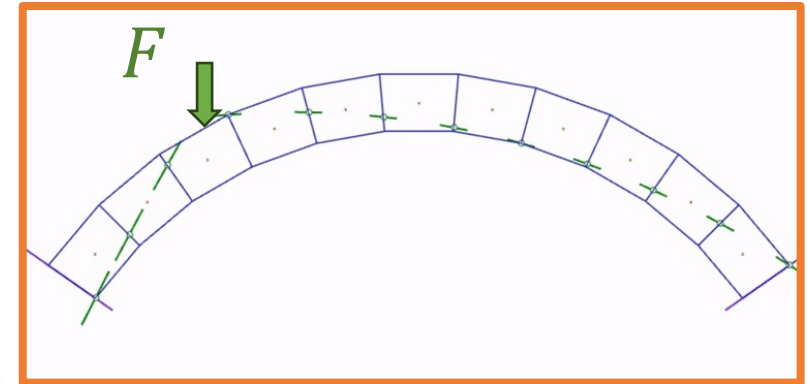


3<sup>ème</sup> contrainte principale, affichée sur la déformée

Durée du calcul :  
environ 4,5 secondes par pas de temps



Analyse limite (AL) :



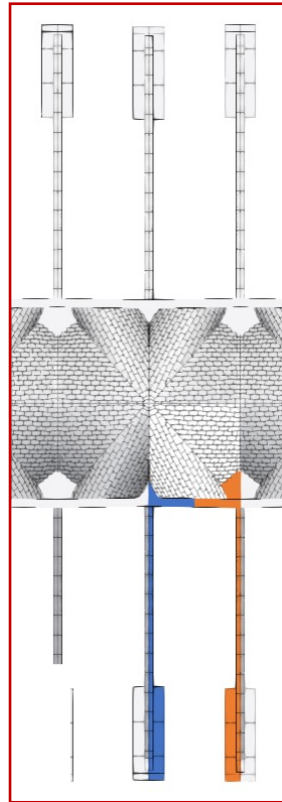
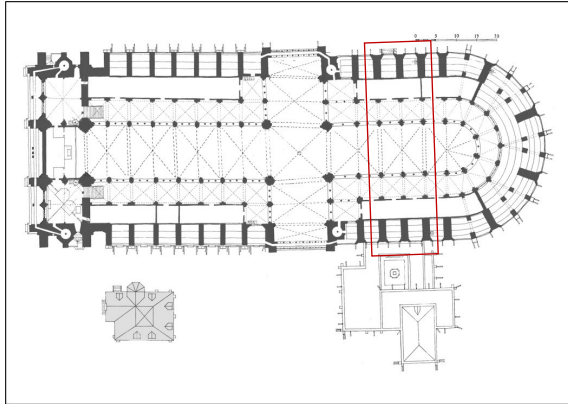
Forces résultantes aux joints et mode de rupture

Durée du calcul :  
environ 2 ms

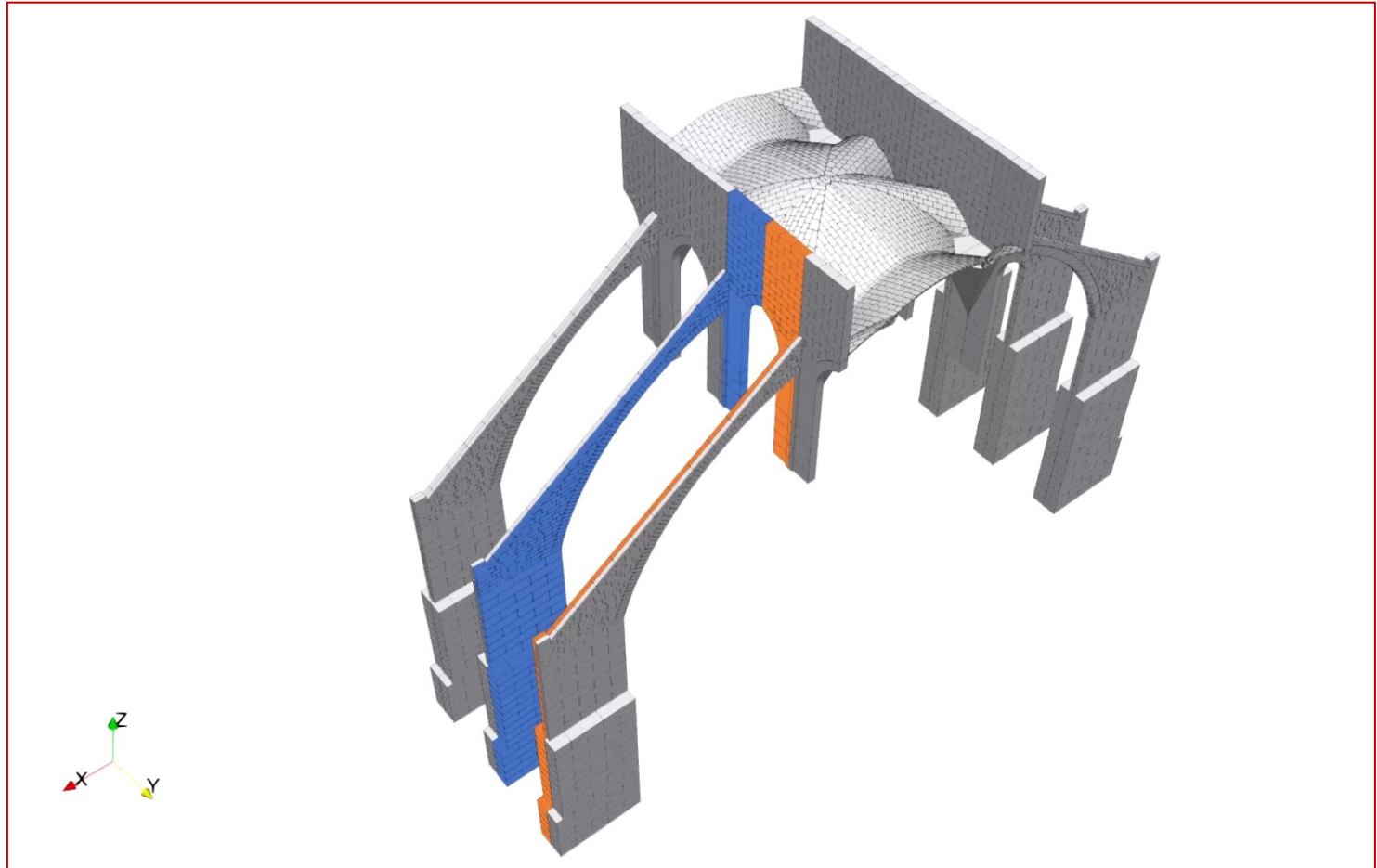
### 3. Méthodes **AL** et **MEF** comparées



Cathédrale Notre-Dame de Paris :  
voûte du chœur



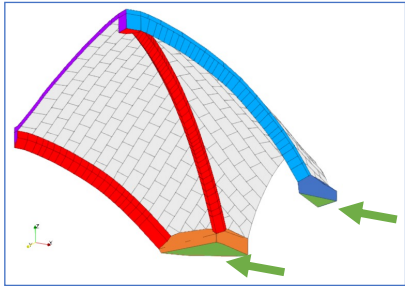
Géométrie bloc à bloc réalisée en grande partie  
par Antoine Gros, MAP Marseille



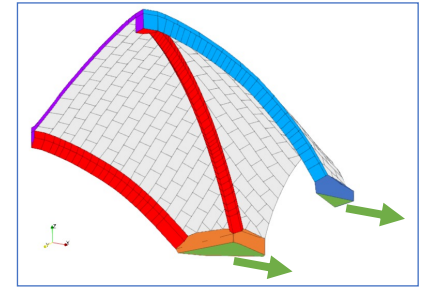
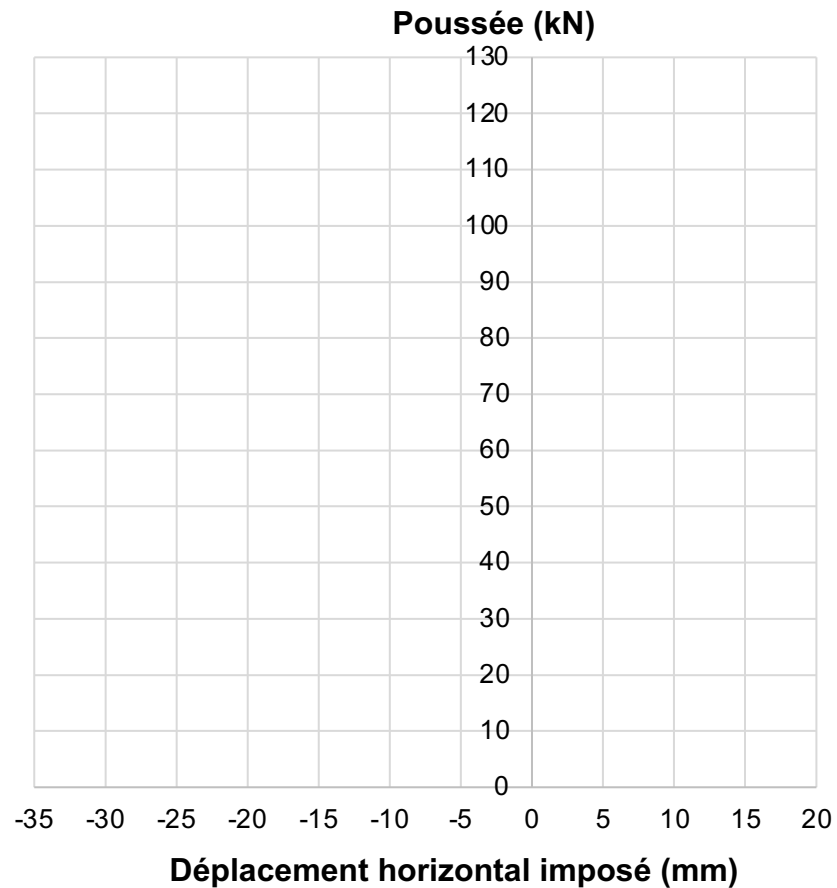
### 3. Méthodes AL et MEF comparées



MEF : Courbe de fonctionnement du quart de voûte sexpartite



Déplacement vers  
l'intérieur de la cathédrale



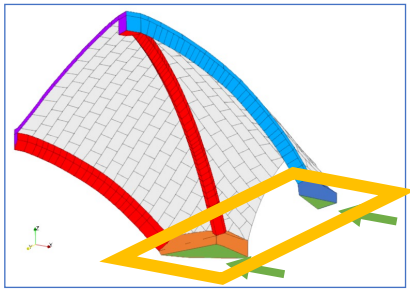
Déplacement vers  
l'extérieur de la cathédrale



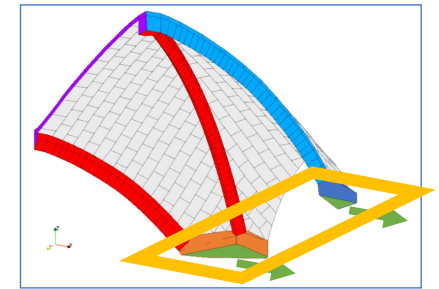
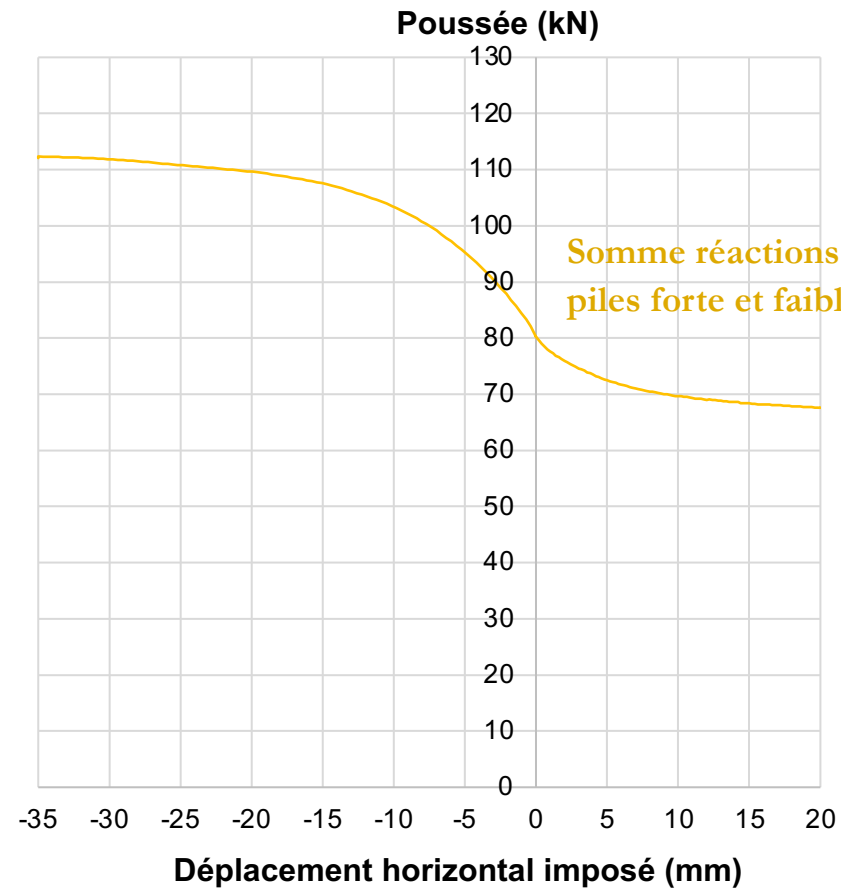
### 3. Méthodes AL et MEF comparées



MEF : Courbe de fonctionnement du quart de voûte sexpartite



Déplacement vers  
l'intérieur de la cathédrale

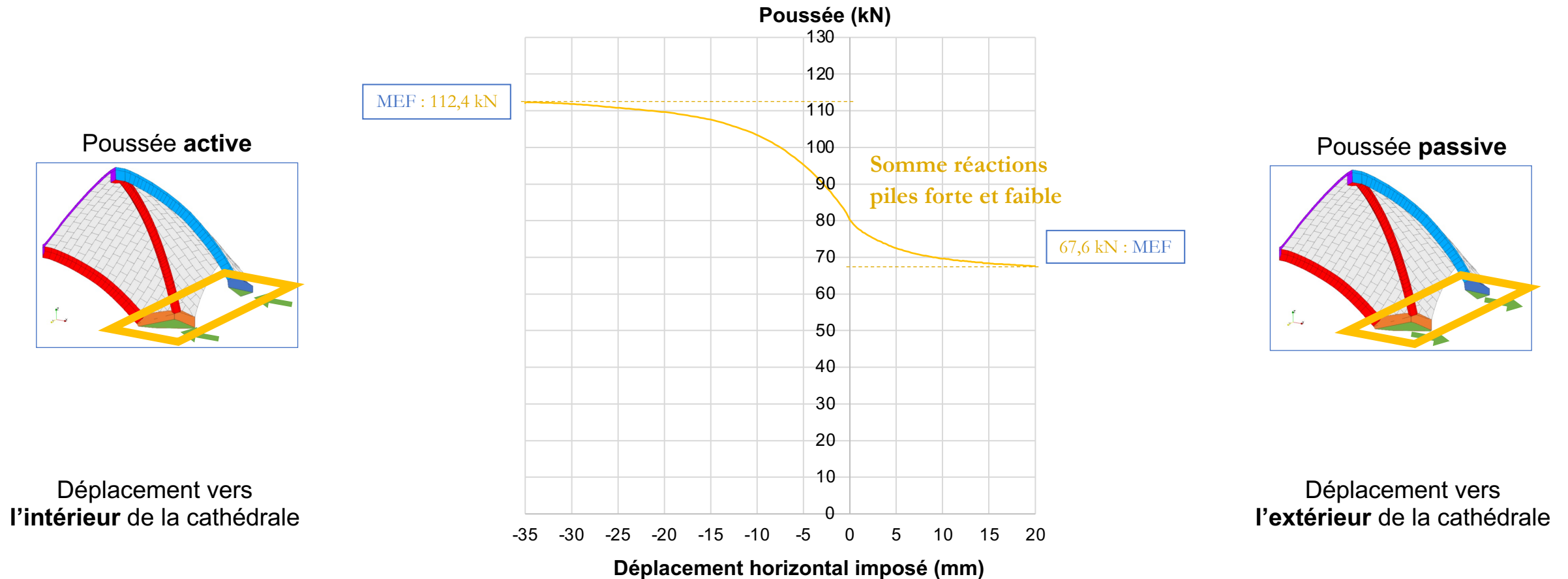


Déplacement vers  
l'extérieur de la cathédrale

### 3. Méthodes AL et MEF comparées



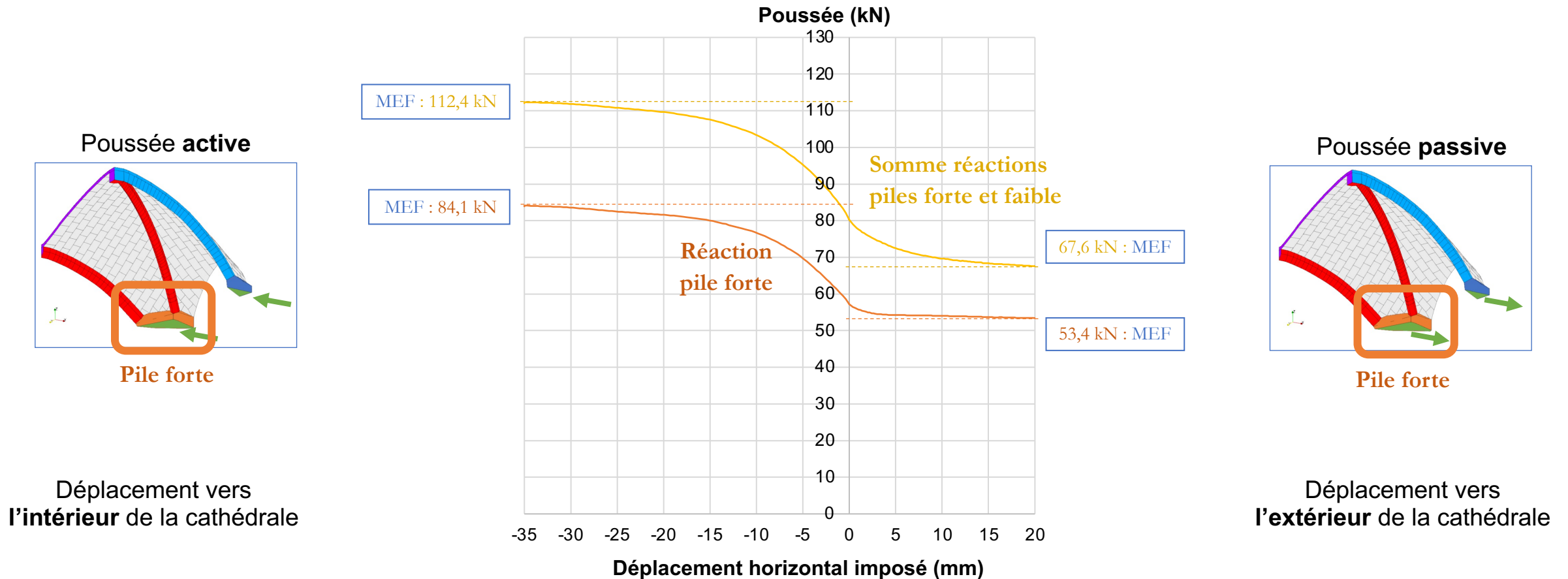
MEF : Courbe de fonctionnement du quart de voûte sexpartite



### 3. Méthodes AL et MEF comparées



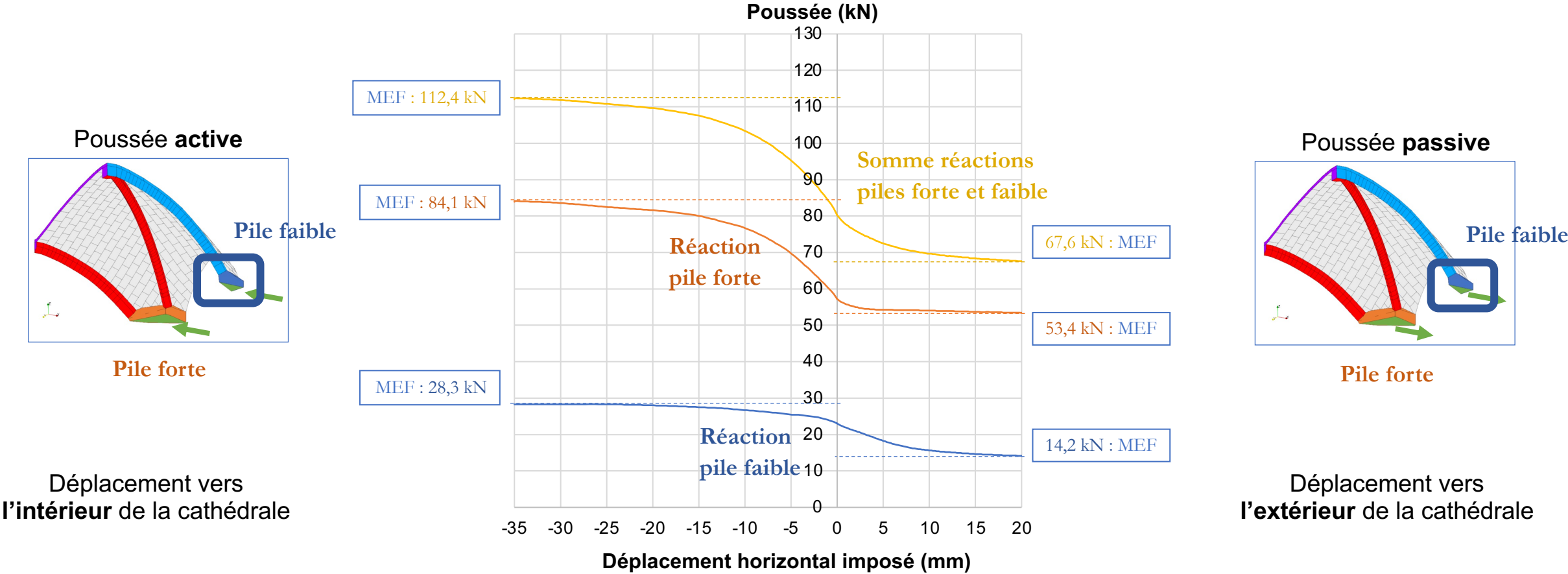
MEF : Courbe de fonctionnement du quart de voûte sexpartite



### 3. Méthodes AL et MEF comparées



MEF : Courbe de fonctionnement du quart de voûte sexpartite

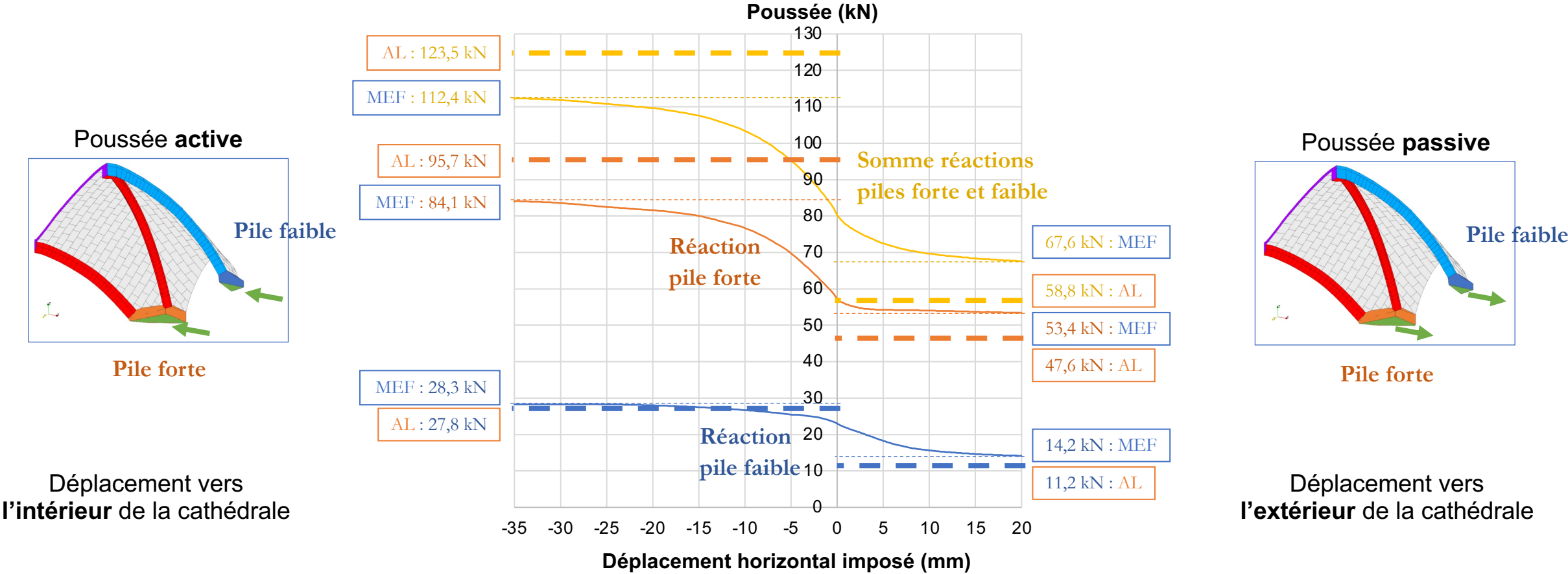




### 3. Méthodes AL et MEF comparées



MEF : Courbe de fonctionnement du quart de voûte sexpartite  
AL : Poussées maximales et minimales admissibles

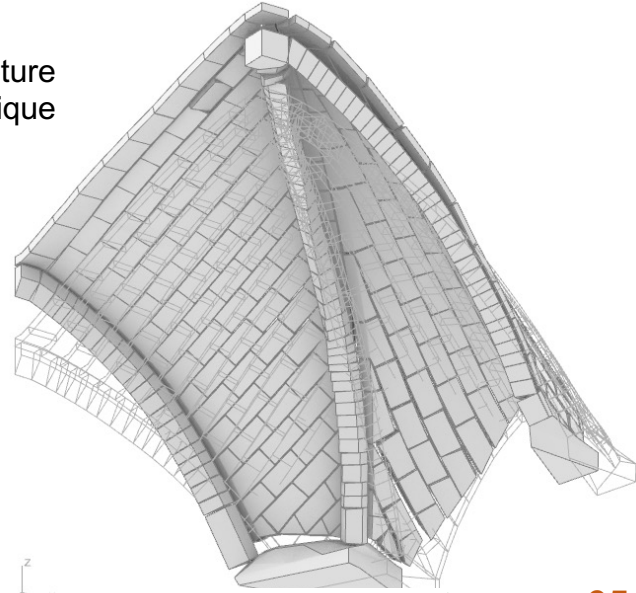


### 3. Méthodes **AL** et **MEF** comparées

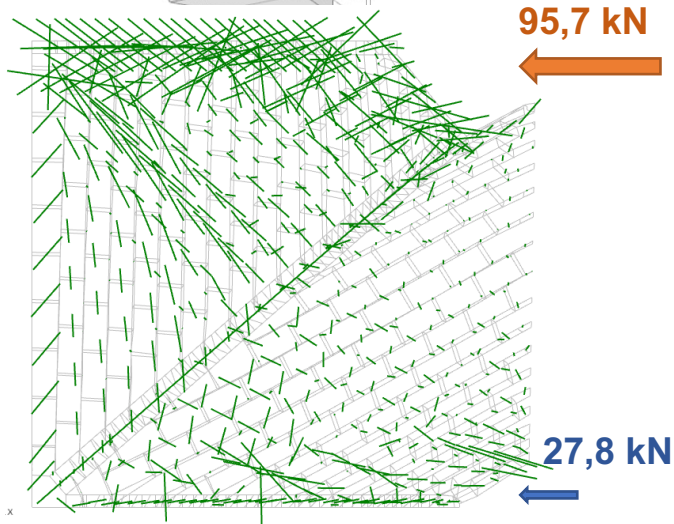


**AL** - Critères :  $M_T = 0$  ;  $\mu = 0,8$  ;  $\sigma_c = 1,0 \text{ MPa}$

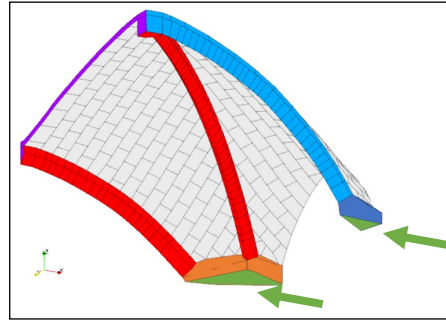
Mode de rupture  
cinématique



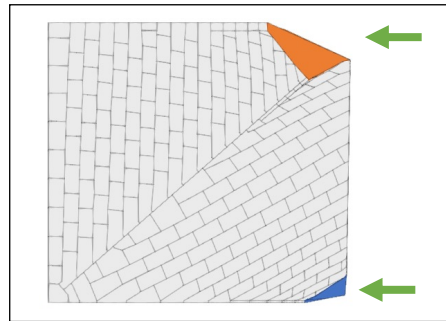
Efforts résultants  
aux joints



Déplacement vers  
l'intérieur de la cathédrale

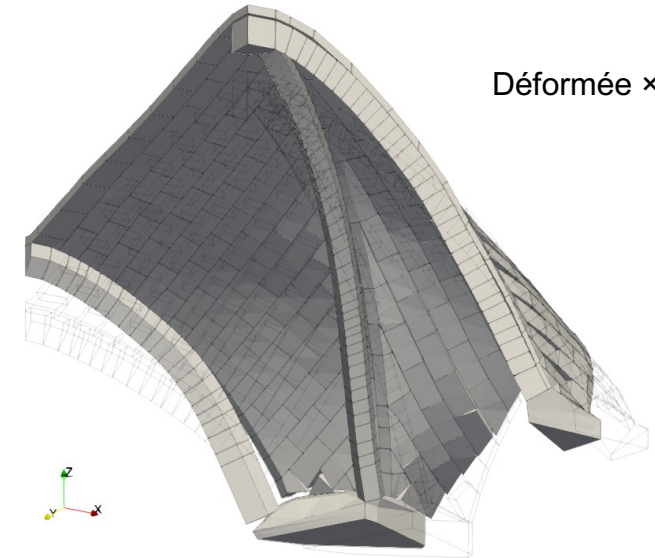


Poussée active



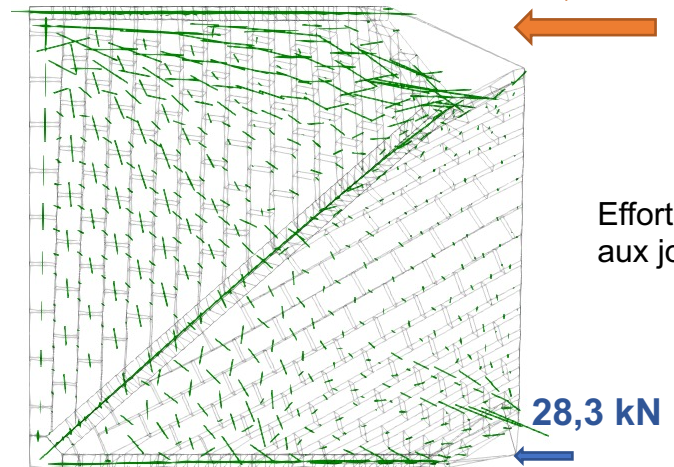
**MEF** - après un déplacement imposé de -35 mm

Déformée  $\times 20$



84,1 kN

Efforts résultants  
aux joints

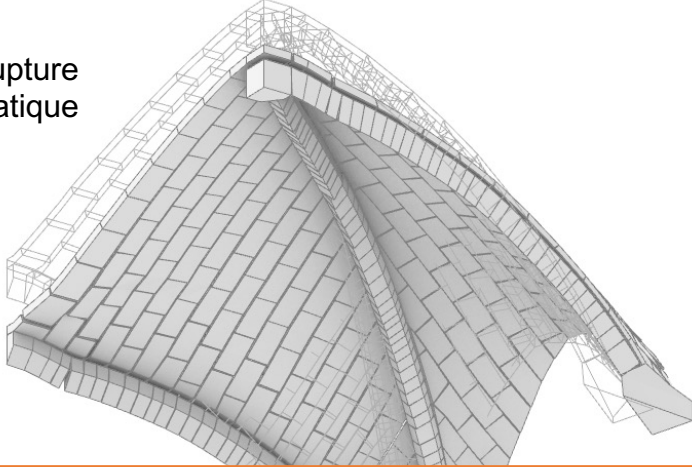


### 3. Méthodes **AL** et **MEF** comparées



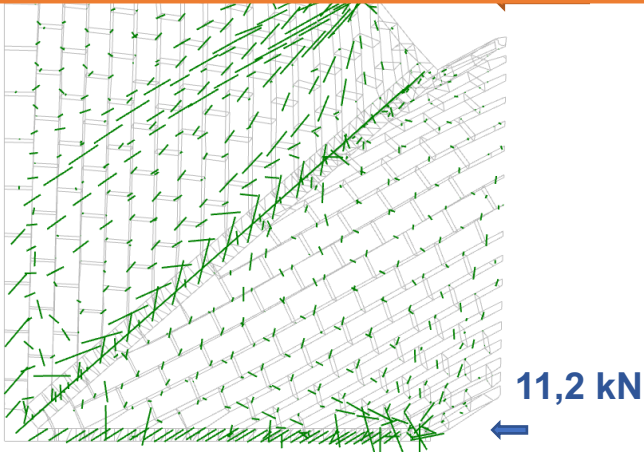
**AL** - Critères :  $M_T = 0$  ;  $\mu = 0,8$  ;  $\sigma_c = 1,0 \text{ MPa}$

Mode de rupture  
cinématique

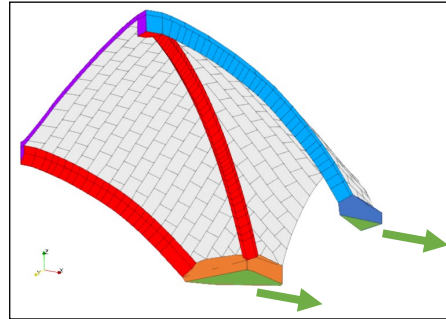


**Temps de calcul : 40 secondes**  
sur un ordi portable banal

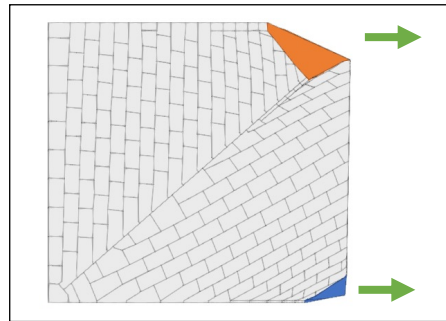
Efforts résultants  
aux joints



Déplacement vers  
l'**extérieur** de la cathédrale

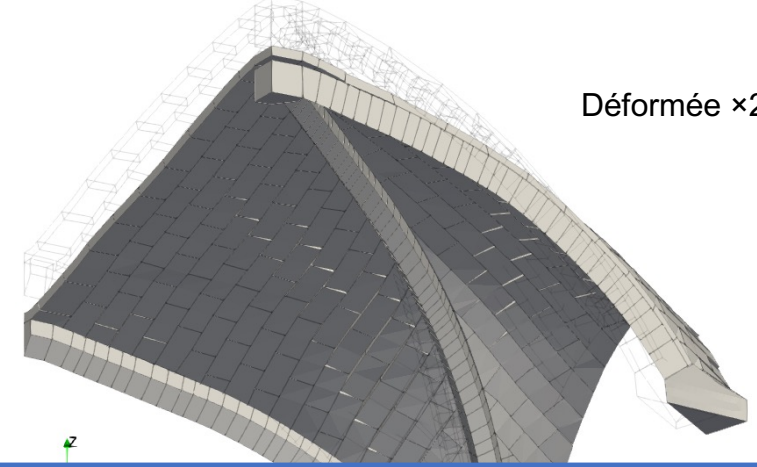


Poussée **passive**



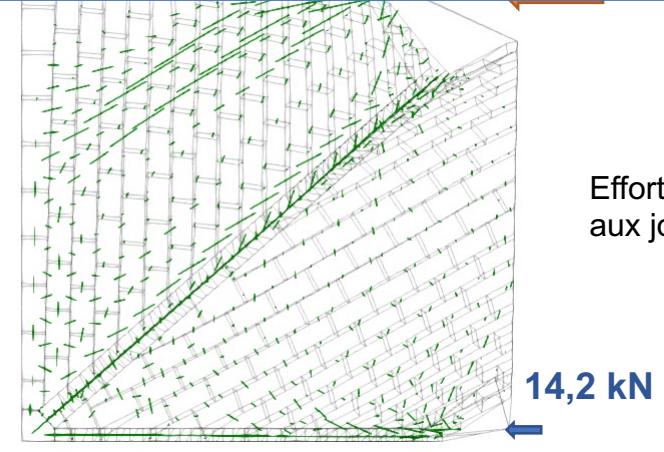
**MEF** - après un déplacement imposé de +20 mm

Déformée  $\times 20$



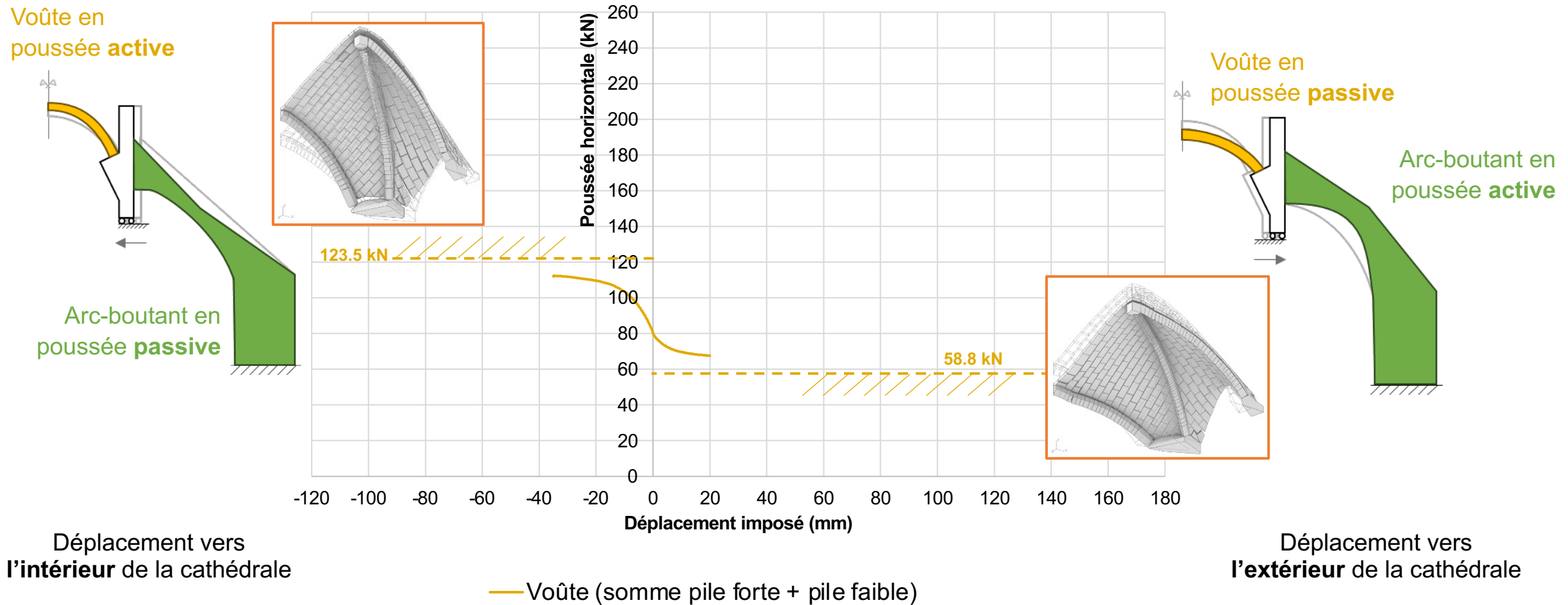
**Temps de calcul : 20 heures**  
sur un cluster de calcul haute performance

Efforts résultants  
aux joints



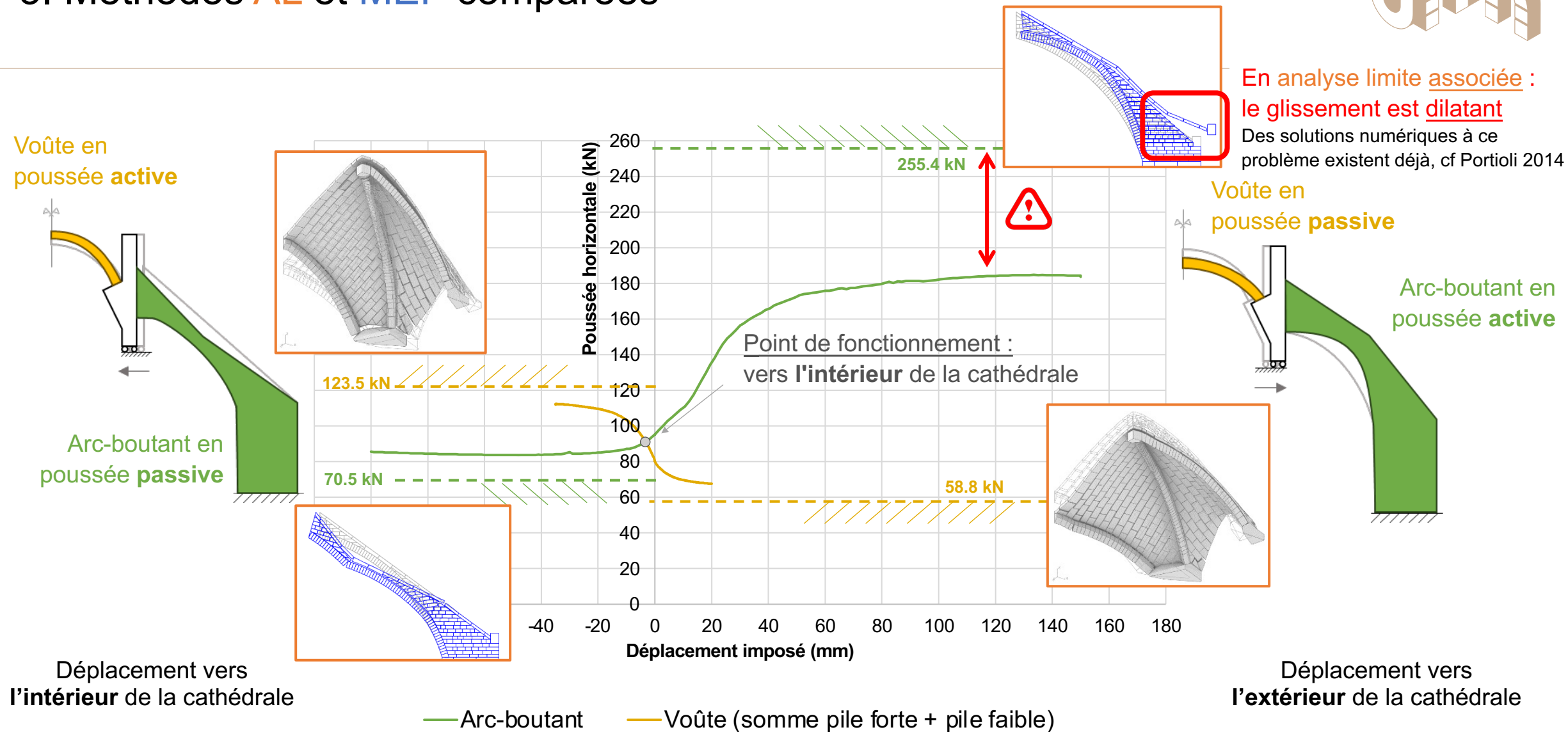


### 3. Méthodes **AL** et **MEF** comparées





### 3. Méthodes AL et MEF comparées



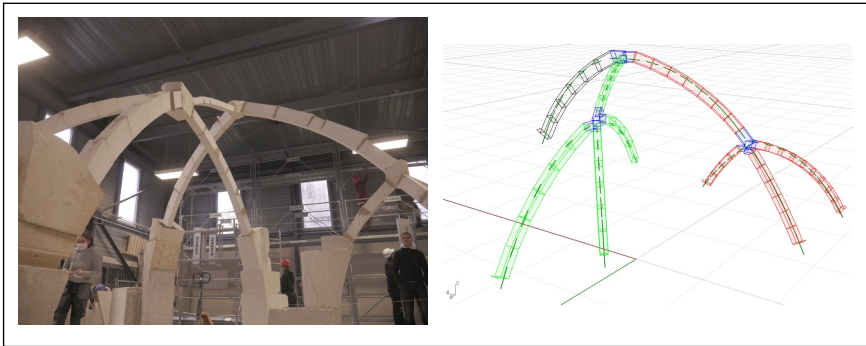
# Modélisation **bloc à bloc par analyse limite** : conclusion et perspectives



Adapté pour l'**étude mécanique des structures clavées** : fiabilisation par comparaison avec **MEF** pas à pas

Philosophie de calcul par **analyse limite** déjà omniprésente dans les méthodes de dimensionnements **ELU** actuelles  
bielles-tirants pour le béton (EC2), rotules plastiques en constructions métalliques (EC3), calculs géotechniques (EC7), ...

Plugin Stabilithos déjà utilisé avec succès lors des phases de conception de **workshops de taille de pierre** pour valider la stabilité :



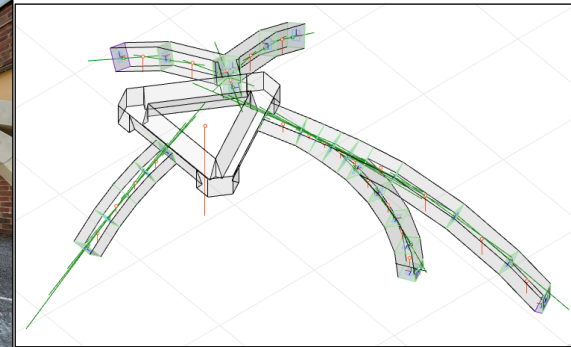
« Heptapode », École d'architecture Paris-Malaquais, CAP taille de pierre co-encadré avec P. Vergonjeanne et B. Bruyère, 2022



Passerelle pour les « Ateliers Design », École des Ponts, École d'architecture Paris-Est, co-encadré avec P. Vergonjeanne, 2023



Workshop UCL London, co-encadré avec P. Vergonjeanne, 2024



## Quelques pistes de développements possibles :

- Améliorer la **précision** des résultats : questions de post-traitement (critères de résistance actifs/non actifs, répartition de contraintes élasto-plastique), enrichissement des critères de résistance (glissement non dilatant, torsion pour l'interface 3D...)
- Comportement **transitoire** aux joints de mortier : résistance en traction, cohésion ( $f_{vk0}$ )
- Applications à d'**autres typologies** de structures : structures mixtes pierre-acier, structures en brique de terre crue, etc.



# Merci de votre attention

**Contact :**

**NOUGAYREDE Paul, CIBLAC Thierry**

[paul.nougayrede@univ-tlse3.fr](mailto:paul.nougayrede@univ-tlse3.fr), [thierry.ciblac@paris-malaquais.archi.fr](mailto:thierry.ciblac@paris-malaquais.archi.fr)

Lien de téléchargement du plugin d'**analyse limite bloc à bloc** pour Rhinoceros, Stabilithos (bientôt dispo... !) :  
<https://www.food4rhino.com/en/app/stabilithos>

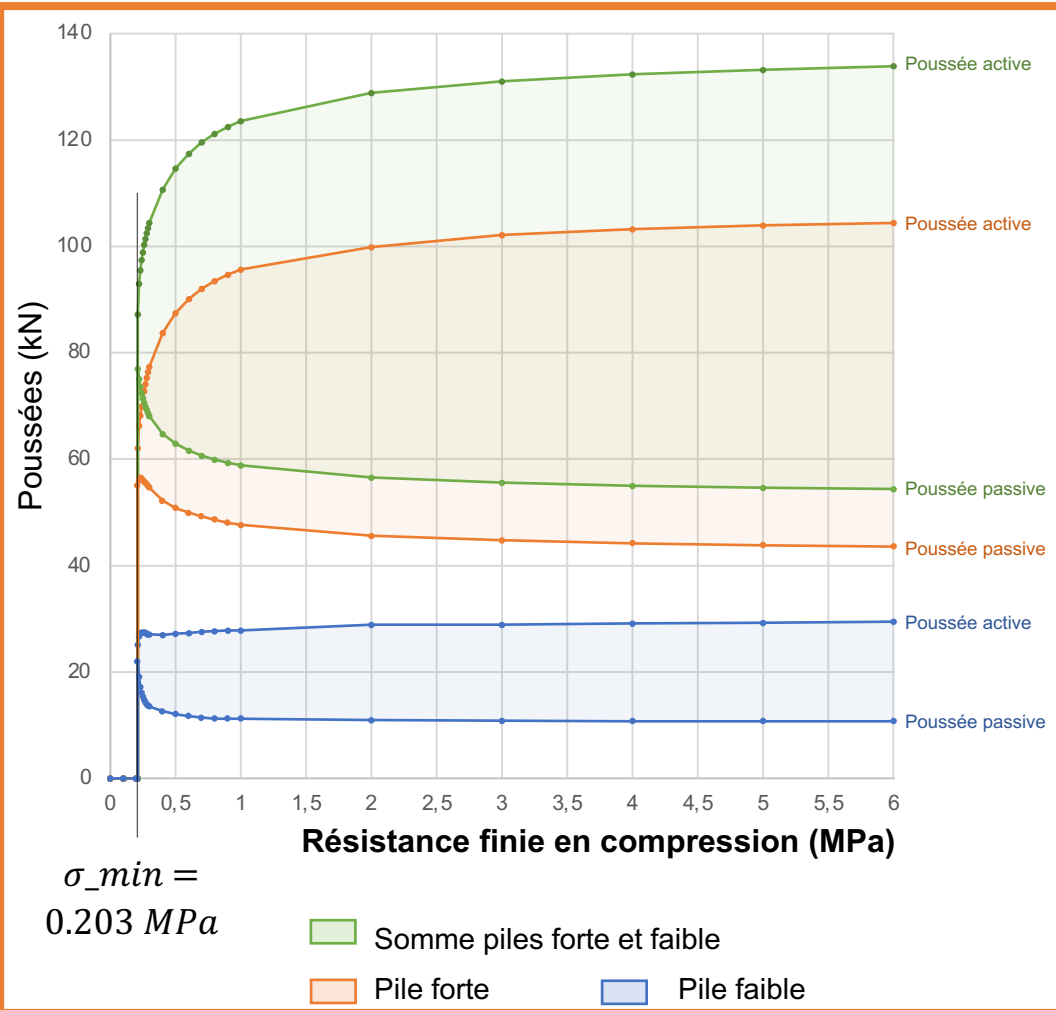
Lien de la thèse « Analyse et conception des structures clavées : approches théoriques et investigations numériques » :  
<https://theses.hal.science/tel-04523845>

Journées Nationales de la Maçonnerie  
5ème édition | Bordeaux  
12 et 13 juin 2025



**AL**  
Influence de la **résistance finie en compression** sur les poussées minimales et maximales admissibles par la voûte

Critères :  
 $M_T = 0$  ;  $\mu = 0,8$



Interprétations :

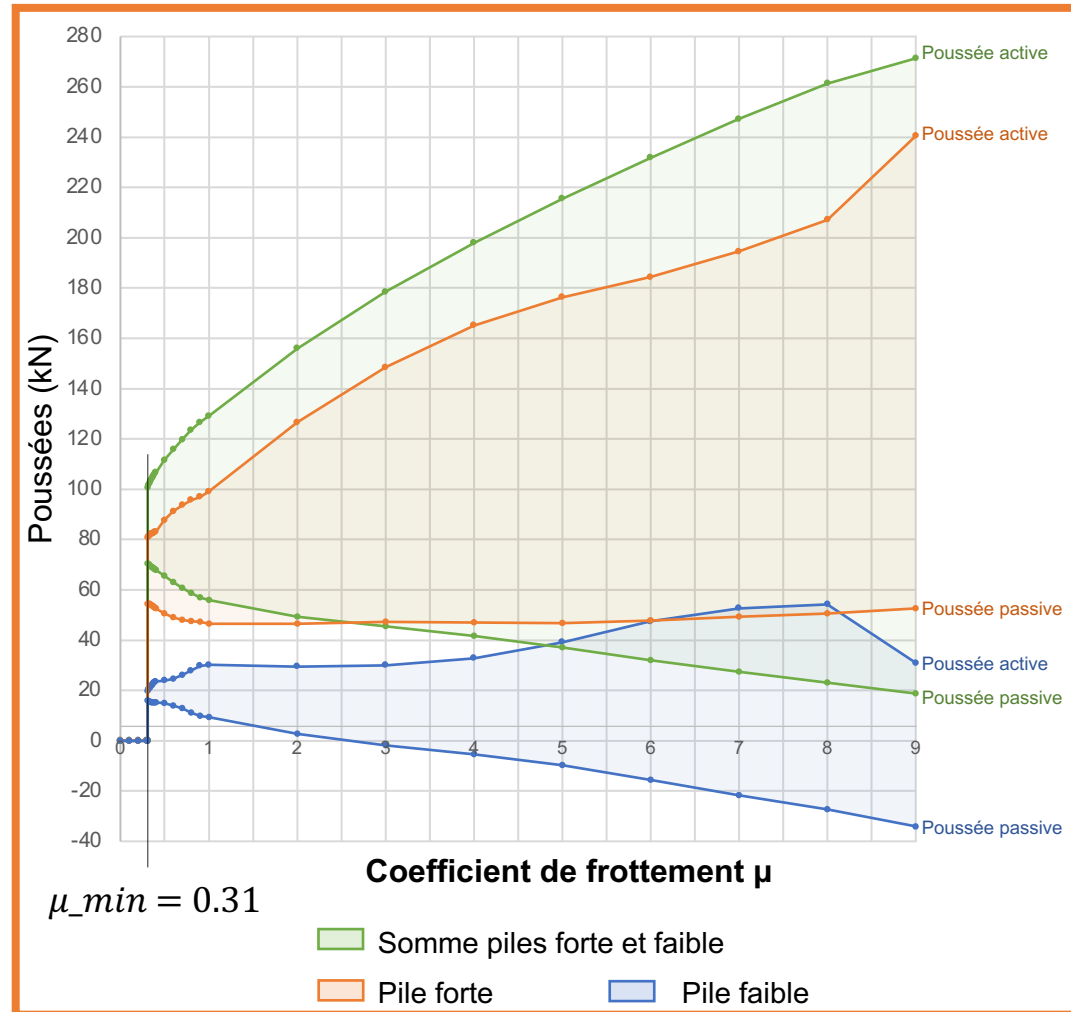
- Peu d'influence de la résistance finie en compression dans les plages de valeurs usuelles (1,0 MPa à 10,0 MPa)
- Mise en évidence du comportement différent entre pile forte et pile faible, quelle que soit la résistance finie en compression





**AL**  
Influence du **coefficient de frottement** sur les poussées minimales et maximales admissibles par la voûte

Critères :  
 $M_T = 0$  ;  $\sigma_c = 1,0 \text{ MPa}$



Interprétations :

- Forte influence du coefficient de frottement dans les plages de valeurs usuelles (0,4 à 1,0)
- Mise en évidence du comportement différent entre pile forte et pile faible, quel que soit le coefficient de frottement